ΕΙΣΑΓΩΓΗ email: cpalaska@cc.uoi.gr

ΟΡΙΣΜΟΣ
Ένας γραμμικός χώρος (διανυσματικός) πάνω σε ένα σώμα K είναι ένα σύνολο X εφοδιασμένο με δύο συναρτήσεις

i) $+ : X \times X \to X$
$(x,y) \to x+y$

ii) $\cdot : K \times X \to X$
$(\lambda, x) \to \lambda x$

ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ
1) προσεταιριστική ιδιότητα της +:
$(x+y)+z = x+(y+z) \quad \forall x,y,z \in X$

2) αντιμεταθετική ιδιότητα της +:
$x+y = y+x \quad \forall x,y \in X$

3) $\exists$ ουδέτερο στοιχείο ως προς + (συμβολισμός 0)
$x+0 = 0+x = x, \ \forall x \in X$

4) $\lambda(\mu x) = (\lambda\mu)x \quad \forall x \in X, \forall \lambda,\mu \in K$

5) $(\lambda+\mu)x = \lambda x + \mu x \quad \forall x \in X, \forall \lambda,\mu \in K$

6) $\lambda(x+y) = \lambda x + \lambda y \quad \forall x,y \in X, \forall \lambda \in K$

7) $\exists$ ουδέτερο στοιχείο ως προς τον βαθμωτό πολλαπλασιασμό (συμβολισμός 1)
$x \cdot 1 = 1 \cdot x = x, \ \forall x \in X$

8) $0x = 0 \quad \forall x \in X$

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ
Ο συμβολισμός 0 χρησιμοποιείται και για μηδενικό στοιχείο του K και για ουδέτερο στοιχείο ως προς + στο X.

ΠΡΟΤΑΣΗ
Εάν X είναι ένας διανυσματικός χώρος επί ενός σώματος K τότε $\forall x \in X$ το $(-1)x$ θα το συμβολίζουμε με $-x$.
Απο τις ιδιότητες (5) και (8) έχουμε ότι

$x+(-x) = 1x+(-1)x = (1-1)x = 0x = 0$

Οποτε το $-x$ θα το ονομαζουμε προσθετικό αντιστροφο του x.

ΠΡΟΤΑΣΗ

Αν $x+y=0$ τότε $y=-x$

ΑΠΟΔΕΙΞΗ

Πραγματι, $x+y=0 \Rightarrow (-x)+x+y = -x \Rightarrow 0+y=-x \Rightarrow y=-x$

ΟΡΙΣΜΟΣ

$\forall x,y \in X$ ορίζουμε $x-y = x+(-y)$

ΠΡΟΤΑΣΗ

Εστω E ενα μη κενό συνολο και μια απεικόνιση $d: E\times E \to \mathbb{R}$.
Η συνάρτηση d ειναι μετρικη αν-ν:

i) $d(x,y)\geq 0$, $d(x,y)=0 \Leftrightarrow x=y$ $\forall x,y \in E$

ii) $d(x,y)=d(y,x)$ $\forall x,y \in E$ συμμετρικη

iii) $d(x,y)\leq d(x,z)+d(z,y)$ $\forall x,y,z \in E$ τριγωνικη ανισοτητα

ΟΡΙΣΜΟΣ

Ο E εφοδιασμενος με μια μετρικη d λέγεται μετρικος χωρος και συμβολιζεται με (E,d)

ΠΡΟΤΑΣΗ

Εαν (E,d) ειναι ενας μετρικος χωρος, τότε

i) $B(a,r) = \{x\in E : d(a,x) < r\}$ Ανοιχτή μπαλα

ii) $B_0(a,r) = B(a,r)\setminus\{a\}$ Μπαλα χωρις το κεντρο της

ΜΕΤΡΙΚΕΣ ΣΤΟΝ ΧΩΡΟ $\mathbb{R}^n$

Εαν $x=(x_1,\dots,x_n)$, $y=(y_1,\dots,y_n)$

I) $d(x,y) = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (x_i \cdot y_i)^2}$ Ευκλειδια μετρική

2) $d_1(x,y) = \sum_{i=1}^{n} |x_i - y_i|$

3) $d_2(x,y) = \max\{|x_i - y_i|, i = 1,2,\dots,n\}$

ΣΤΑΘΜΗΤΟΣ ΧΩΡΟΣ

ΟΡΙΣΜΟΣ

Έστω X ένας διανυσματικός χώρος επί ενός σώματος K. Μια στάθμη (norm) επί του X είναι μια συνάρτηση $\|\cdot\|: X \to \mathbb{R}$ (στους θετικούς ή το 0, όχι σε όλο το $\mathbb{R}$), η οποία σε κάθε $x \in X$ αντιστοιχεί έναν μη αρνητικό πραγματικό αριθμό $\|x\|$ (που ονομάζεται στάθμη του x)

ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ

1) $\|x\| \geq 0, \ \forall x \in X$

2) $\|x+y\| \leq \|x\| + \|y\| \ \forall x,y \in X$ τριγωνική

3) $\|\lambda x\| = |\lambda| \, \|x\| \ \forall \lambda \in K, \forall x \in X$

4) $\|x\| = 0 \Rightarrow x = 0$

ΣΗΜΕΙΩΣΗ

Από τα παραπάνω προκύπτει

i) $\|0\| = 0$, διότι από την (3), για $\lambda = 0$ έχουμε $\|0\| = \|0 \cdot x\| = 0 \, \|x\| = 0$

ii) Για όλα τα $x,y \in X$ έχουμε $\|x-y\| = \|y-x\|$ (λόγω της (3))

iii) $|\|x\| - \|y\|| \leq \|x-y\|$

ΑΠΟΔΕΙΞΗ

iii) $\|x\| = \|x-y+y\| \overset{\text{τριγωνική}}{\leq} \|x-y\| + \|y\| \Rightarrow \|x\| - \|y\| \leq \|x-y\|$

Ομοίως, $\|y\| = \|y-x+x\| \leq \|y-x\| + \|x\|$

Άρα $|\|x\| - \|y\|| \leq \|x-y\|$

ΟΡΙΣΜΟΣ

Κάθε διανυσματικός χώρος X, εφοδιασμένος με μια στάθμη $\|\cdot\|$, λέγεται σταθμικός χώρος.

ΣΗΜΕΙΩΣΗ

- Εάν έχουμε ένα χώρο X, εφοδιασμένο με μια στάθμη $\|\cdot\|$, τότε ο X είναι μετρικός χώρος με μετρική $d: X\times X \to \mathbb{R}$, $d(x,y) = \|x-y\|$

- Η $d(x,y) = \|x-y\|$ είναι αναλλοίωτη ως προς τις μεταφορές, δηλαδή:

α) $d(x+z, y+z) = d(x,y) \quad \forall x,y,z \in X$

β) $d(\lambda x, \lambda y) = |\lambda|\, d(x,y) \quad \forall \lambda \in K$

Άρα κάθε σταθμητός χώρος είναι και μετρικός χώρος εφοδιασμένος με την παραπάνω μετρική.
Το αντίστροφο δεν ισχύει πάντα.